３０３　変数分離法による三次元二群拡散方程式の解法（2）

Solution of Three-dimensional Two-group Diffusion Equation
by Separation of Variables(2)

㈱　ナイス　江連 秀夫
Hideo Ezure

要約：三次元二群拡散方程式の解法に変数分離を適用し、斉次一次元拡散方程式を導き、その解を用いて反射体中の三次元二群拡散方程式の解、階差式を得る。

キーワード：三次元、二群拡散方程式、解法、中性子束、変数分離、斉次、階差式、反射体

まえがき：炉定数が均質な体系では三次元拡散方程式は変数分離ができ、その結果、斉次一次元拡散方程式が導かれる。その解は、二領域の解析解を用いて求められ、その結果を反射体の三次元拡散方程式の解法に利用して階差式を得た。この結果は、増倍系の結果に比べて簡単に表せる。

解法：三次元二群拡散方程式を変数分離（X(x)Y(y)Z(z)）して、その結果からノードの平均中性子束は一次元の解析解を利用して次の階差式[1]で表される。

$$\overline{\Phi^i} = \left[\sum_{K=x,y,z}\sum_{m=1,-1}\frac{(\Xi^i_\kappa + \Xi^{i+m}_K)^{-1}\Gamma^i_\kappa}{2\ell_K} + \Pi^i\right]^{-1}\sum_{K=x,y,z}\sum_{m=1,-1}\frac{(\Xi^i_\kappa + \Xi^{i+m}_K)^{-1}\Gamma^{i+m}_K}{2\ell_K}\overline{\Phi^{i+m}_K} \quad (1)$$

Ξ,Γ,Π：炉定数、特性方程式の固有値等からなる 2×2 マトリックス、m:左右、上下のノード

反射体中での三次元二群拡散方程式に変数分離を適用すると、次の斉次一次元拡散方程式が導かれる。

$$-D\frac{d^2\overline{X}}{dx^2} + \Lambda\overline{X} = 0 \quad (2) \qquad \overline{X} = X\iint\frac{Y(y)Z(z)dydz}{4\ell_y\ell_z} \quad (3)$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Sigma^i_1 + \dfrac{\overline{J^i_{1y,z}}}{\overline{\phi^i_1}} & 0 \\ -\Sigma^i_{12} & \Sigma^i_2 + \dfrac{\overline{J^i_{2y,z}}}{\overline{\phi^i_2}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \overline{J^i_{1y,z}} \\ \overline{J^i_{2y,z}} \end{pmatrix} = \sum_{K=y,z}\sum_{m=1,-1}\frac{(\Xi^i_\kappa + \Xi^{i+m}_K)^{-1}}{2\ell_K}\left(\Gamma^i_K\overline{\Phi^i} - \Gamma^{i+m}_K\overline{\Phi^{i+m}}\right) \quad (5)$$

ここで、$\overline{J^i_{1y,z}}/\phi^i_1, \overline{J^i_{2y,z}}/\phi^i_2$ は変数分離係数、ℓ はノードの半値巾を表す。

(2)式の特性方程式は次式で表される。

$$\begin{vmatrix} D^i_1B^2 + \Sigma^i_1 + \dfrac{\overline{J^i_{1y,z}}}{\overline{\phi^i_1}} & 0 \\ -\Sigma^i_{12} & D^i_2B^2 + \Sigma^i_2 + \dfrac{\overline{J^i_{2y,z}}}{\overline{\phi^i_2}} \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Ξ,Γ は、(2)の解のノード境界における中性子束、中性子流の連続条件から求められるノード平均中性子束の関係から次式のように得られる。

$$\left.\begin{pmatrix} \dfrac{\tanh\lambda_i\ell}{\lambda_iD_{i1}} & 0 \\ \dfrac{p_i\tanh\lambda_i\ell}{\lambda_iD_{i1}} - \dfrac{p_i\tanh\mu_i\ell}{\mu_iD_{i1}} & \dfrac{\tanh\mu_i\ell}{\mu_iD_{i2}} \end{pmatrix}\right|_{K=x\text{軸方向}} \equiv \Xi^i_K \quad (7) \qquad \left.\begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda_i\ell}{\sinh 2\lambda_i\ell} & 0 \\ \dfrac{2\lambda_i\ell p_i}{\sinh 2\lambda_i\ell} - \dfrac{2\mu_i\ell p_i}{\sinh 2\mu_i\ell} & \dfrac{2\mu_i\ell}{\sinh 2\mu_i\ell} \end{pmatrix}\right|_{K=x\text{軸方向}} \equiv \Gamma^i_K \quad (8)$$

λ_i、μ_i：(6)式の解の絶対値の平方根、p_i：結合係数

これらを(1)式に代入すると、次の階差式が求められる。

$$\overline{\phi^i_1} = \frac{1}{\Sigma^i_1}\frac{\displaystyle\sum_{\kappa=x,y,z}\sum_{m=-1,1}\delta^{i+m}_{1\kappa}\overline{\phi^{i+m}_{1\kappa}}}{1 + \dfrac{\theta^i_1}{\Sigma^i_1}} \quad (9)$$

$$\overline{\phi^i_2} = \frac{1}{\Sigma^i_2}\frac{\displaystyle\sum_{\kappa=x,y,z}\sum_{m=-1,1}\left\{p^i\left(1 - \frac{\theta^i_2}{p^i\Sigma^i_1}\right)\left(1 + \frac{\theta^i_1}{\Sigma^i_1}\right)^{-1}\delta^{i+m}_{1\kappa} + \delta^{i+m}_{2\kappa}\right\}\overline{\phi^{i+m}_{1\kappa}} + \sum_{\kappa=x,y,z}\sum_{m=-1,1}d^{i+m}_{2\kappa}\overline{\phi^{i+m}_{2\kappa}}}{1 + \dfrac{g^i_2}{\Sigma^i_2}} \quad (10)$$

ただし、$\displaystyle\sum_{K=x,y,z}\sum_{m=1,-1}\frac{(\Xi^i_\kappa + \Xi^{i+m}_K)^{-1}\Gamma^i_\kappa}{2\ell_K} \equiv \begin{pmatrix} \theta^i_1 & 0 \\ \theta^i_2 & g^i_2 \end{pmatrix}$ (11)　$\dfrac{(\Xi^i_\kappa + \Xi^{i+m}_K)^{-1}\Gamma^{i+m}_K}{2\ell_K} \equiv \begin{pmatrix} \delta^{i+m}_{1K} & 0 \\ \delta^{i+m}_{2K} & d^{i+m}_{2K} \end{pmatrix}$ (12)　$p^i = \dfrac{\Sigma^i_{12}}{\Sigma^i_1}$ (13)

(9)式は隣のノードからの高速中性子の流入よる高速中性子束を表わす。更に、(10)式の括弧中の第 1 式は、隣のノードから流入した高速中性子が減速して熱中性子になる成分と、隣のノードで高速中性子が減速して熱中性子になってから流入する成分からなる。また、第 2 項は隣のノードからの熱中性子の流入を表す。$\delta^{i+m}_{2\kappa}$ と θ^i_2/Σ^i_1 はノード法、近代ノード法では含まれていない。

まとめ：三次元二群拡散方程式から変数分離によって斎次一次元二群拡散方程式が導かれ、その解を反射体中の三次元二群拡散方程式の解法に用いて、階差方程式が得られ、ノード法との差が明らかにできた。また、非増倍系の階差式は増倍系の場合[1),2)]より簡単になる。

文献：1）江連, “ 変数分離による三次元二群拡散方程式の解法”、2008 年秋の大会、C17.
2）江連, “ 三次元二群拡散方程式の解法”、2005 年秋の大会、E52.